

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

NOUVELLE APPROCHE PAR SIMULATION POUR LA
PROBABILITÉ DE PREMIER TEMPS DE PASSAGE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES
CONCENTRATION STATISTIQUE

PAR
IMÈNE CHAHIRA ALLAB

SEPTEMBRE 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| LISTE DES TABLEAUX | iv |
| LISTE DES FIGURES | v |
| INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE I | |
| | 4 |
| 1.1 Définitions générales | 4 |
| 1.1.1 Mouvement Brownien | 4 |
| 1.1.2 Pont Brownien | 5 |
| 1.1.3 Processus Gauss-Markov | 6 |
| 1.1.4 Processus de diffusion et premier temps de passage | 6 |
| 1.2 Densité de premier temps de passage à travers une courbe constante | 8 |
| 1.2.1 Densité de premier temps de passage d'un mouvement brownien standard | 8 |
| 1.2.2 Densité de premier temps de passage d'un mouvement brownien quelconque | 9 |
| 1.3 Densité de premier temps de passage à travers une frontière déterministe | 10 |
| CHAPITRE II | |
| | 15 |
| 2.1 Méthode de Monte Carlo | 15 |
| 2.1.1 Exemples | 16 |
| 2.2 Problématique | 19 |
| 2.3 L'approche Monte Carlo avec simulation de passage inter-temporel | 21 |
| 2.3.1 Approximation d'un pont de diffusion | 24 |
| CHAPITRE III | |
| | 30 |
| 3.1 Résultats de simulation | 35 |
| 3.1.1 Exemple 1 | 35 |

| | |
|--------------------------------------|----|
| 3.1.2 Exemple 2 | 37 |
| 3.2 Application financière | 39 |
| CONCLUSION | 43 |
| 3.3 Modèle de Di Nardo | 44 |
| 3.4 Codes | 45 |
| RÉFÉRENCES | 54 |

LISTE DES TABLEAUX

| Tableau | Page |
|---|------|
| 2.1 Probabilité de passage par rapport à différents pas de discrétisation Δt et nombre de chemin N | 17 |
| 2.2 Probabilité de passage à travers y par rapport à différents pas de discrétisation Δt et différentes valeurs de la volatilité σ | 18 |
| 3.1 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10$ | 35 |
| 3.2 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 100$ | 36 |
| 3.3 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 1000$ | 36 |
| 3.4 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10000$ | 37 |
| 3.5 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10$ | 37 |
| 3.6 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 100$ | 38 |
| 3.7 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 1000$ | 38 |
| 3.8 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10000$ | 39 |
| 3.9 Comparaison des probabilité de Scott et Watier avec la probabilité obtenue par APP. | 42 |

LISTE DES FIGURES

| Figure | Page |
|--|------|
| 2.1 Premier passage non détecté à travers une simulation Monte Carlo basique, | 17 |
| 2.2 Simulation des passages de N processus d'Ornstein-Uhlenbeck à travers une barrière linéaire $y(t)$ | 19 |
| 2.3 Éventuel passage non détecté par le processus stochastique à travers la courbe déterministe. | 21 |
| 2.4 Agrandissement d'une partie de la trajectoire du processus stochastique. . | 22 |
| 2.5 Représentation de deux trajectoires superposées représentant le même pro- cessus stochastique mais avec des pas de discétisation Δt différents. | 23 |
| 3.1 Densité de la probabilité du premier temps de passage d'un processus Ornstein- Uhlenbeck à travers une barrière $S(t) = 2.0(1.0 - \sinh(0.5t))$ | 31 |
| 3.2 Densité de la probabilité du premier temps de passage d'un mouvement brownien géométrique à travers une barrière $S(t) = 1.0 + 2.0t$ | 33 |
| 3.3 Densité de la probabilité du premier temps de passage d'un CIR modifié à travers la barrière $S(t) = 0.3 + 0.2t$ | 34 |

RÉSUMÉ

Ce mémoire expose une nouvelle méthode de calcul des probabilités du premier temps de passage d'un processus stochastique à travers une courbe déterministe. Le calcul se fait par des approximations à travers des simulations dans un algorithme qui se base sur le résultat de la probabilité exacte de passage d'un mouvement brownien à travers une courbe de Daniels (8). Les résultats de simulation obtenus sont comparés avec ceux obtenus par une méthode Monte Carlo ou par un autre algorithme.

Mots clés : Processus de diffusions, premier temps de passage, courbe de Daniels.

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur François Watier pour son aide considérable, ses conseils et son encadrement.

Je remercie le comité d'évaluation pour ses remarques et corrections constructives.

Je remercie aussi Sorana Froda pour ses encouragements et conseils ainsi que Gisèle Legault pour sa gentillesse et son temps.

Je remercie toute ma famille pour son soutien et conseils.

Et enfin mes amis et collègues Hocine, Amina, Hakime, Azwaw, Lucie, Leila, Mounira, Célia, Anissa, Florence et Jianping.

INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce mémoire à la probabilité du premier temps de passage d'un processus stochastique à travers une barrière que nous pouvons représenter par une équation déterministe qui dépendra de la variable temps t . Les applications de cette problématique sont nombreuses et dans des domaines très diverses tels que la physique (The Kramers problem), la chimie, la finance, *etc.*

Une solution exacte du problème de la probabilité de premier passage n'est pas évidente. Ceci est dû à la complexité des processus ou à des difficultés de calcul. De plus, les résultats pour des calculs numériques ou des simulations sont, en général, trop grossiers. Soit la variable τ représentant le temps du premier passage alors, la probabilité recherchée dans un intervalle $[0, T]$, où T représente l'échéance, est donnée par cette formule

$$P(\tau < T) = \int_0^T f(t)dt = p \quad (0.0.1)$$

Pour calculer la probabilité p (0.0.1), nous avons deux approches possible la résolution analytique de l'équation, ou bien, l'approche de simulation en simulant un grand nombre de scénarios possibles, pour ensuite évaluer la probabilité de façon empirique.

Ces deux méthodes ont évidemment leurs avantages et leurs inconvénients. Par exemple, dans le cas des méthodes exactes et sous certaines hypothèses, on peut facilement déterminer les erreurs de précision contrairement aux méthodes de simulation où le degré de précision est très difficile à établir. L'inconvénient des méthodes exactes est que les temps de calculs sont très longs. Dans les méthodes par simulation, l'avantage est que la simulation des trajectoires est très rapide et qu'il existe plein de modèles pour améliorer cette probabilité

tout en réduisant les temps de calculs. Parmi ces méthodes nous pouvons citer le modèle Di Nardo (2) ou de la méthode de Durbin.

Nous nous sommes focalisé dans ce mémoire sur la méthode par simulation en se basant sur plusieurs études et articles du domaine. Nous avons essayé d'approcher la probabilité du premier temps de passage d'un processus stochastique à travers une courbe déterministe $S(t)$, $t > 0$ en proposant un nouvel algorithme qui donne des résultats assez intéressants. Cet algorithme est meilleur en précision et en temps de calcul qu'une simple méthode Monte Carlo ou celle de Di Nardo (2).

Afin d'améliorer notre estimation de la probabilité du premier temps de passage nous avons découper l'intervalle de temps en plusieurs parties de même taille Δt et simuler des ponts de diffusions dans chaque partie. L'approximation d'un pont de diffusion a fait l'objet de plusieurs travaux dans le domaine de la simulation. Giraudo, Sacerdote et Zucca proposent dans (5) de simuler, pour chaque sous-intervalle, des processus attachés en utilisant essentiellement un schéma d'approximation Kloden Platen avec un ordre de convergence de 1.5. Des résultats plus récents de Lin, Chen et Myk (6) ou Sørensen et Bladt (7) sont aussi intéressants dans ce domaine afin d'améliorer l'estimation de la probabilité du premier temps de passage.

Les méthodes ci-dessus pourraient, dans de nombreux cas, être améliorée de manière significative en appliquant la transformation de Lamperti à la fois sur le processus original et la frontière tel que décrit par exemple dans (9).

En effet, posons

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma(u)} du \quad (0.0.2)$$

en supposant que $F(x)$ est bijective, le problème de départ serait équivalent à la recherche de la densité de premier temps de passage de

$$\tau_{S^*} = \inf\{t > 0 | Y(t) = S^*(t)\}$$

où la nouvelle barrière est donné par $S^*(t) = F(S(t))$. Par la formule d'Itô le processus stochastique $(Y_t)_{t \geq 0}$ satisfait

$$dY(t) = b(Y(t))dt + dW(t), \quad Y(0) = F(x_0) \quad (0.0.3)$$

où

$$b(t, Y(t)) = \frac{\mu(F^{-1}(Y(t)))}{\sigma(F^{-1}(Y(t)))} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(F^{-1}(Y(t)))}{\partial x}. \quad (0.0.4)$$

L'élément de diffusion du processus $Y(t)$ est constant, alors le simple pont brownien devient une bonne approximation du pont de diffusion.

Grâce aux résultat de (8) et pour une courbe $S(t)$ spécifique nous avons la formule exacte de la probabilité de passage à travers $S(t)$. Les résultats seront détaillé dans les différents chapitre de ce mémoire.

Le mémoire est composé de trois chapitres. Le premier porte sur des définitions générales des processus stochastiques et les probabilités du premier temps de passage à travers plusieurs types de frontières. Dans le second chapitre, nous exposons le raisonnement qui nous a conduit à notre algorithme et nous parlons de la méthode de simulation de la probabilité de premier temps de passage par l'approximation locale de la barrière par une courbe de Daniels et par l'approximation locale du processus par un processus attaché. Nous exposons finalement nos résultats dans le chapitre 3 en comparant notre algorithme avec d'autres méthodes en fonction de la qualité de l'approximation du résultat et au temps de calcul.

CHAPITRE I

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats afin de faciliter la compréhension de notre travail. Les différentes définitions sont essentiellement tirées de (1).

1.1 Définitions générales

Afin de modéliser un événement aléatoire qui prend une série de valeurs dans le temps, comme les prix d'une option dans un marché financier ou le changement de température sur une certaine période de temps, on fait appel aux processus stochastiques. Un des plus connus et utilisé, est le Mouvement brownien.

1.1.1 Mouvement Brownien

Définition 1.1.1. *Le processus stochastique en temps continu et à états continus, $\{W(t), t \geq 0\}$ est appelé processus de Wiener, ou mouvement brownien, si :*

- $W(0)=0$;
- $\{W(t), t \geq 0\}$ possède des accroissements indépendants et stationnaires ;
- $W(t)$ suit une loi normal $N(0, \sigma^2 t)$, $\forall t > 0$.

Le processus $\{B(t), t \geq 0\}$, défini par

$$B(t) = \frac{W(t)}{\sigma}$$

s'appelle mouvement brownien standard.

Définition 1.1.2. *Le mouvement brownien avec dérive est une transformation du processus de Wiener. Soit*

$$D(t) = \sigma B(t) + \mu t.$$

où $\{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard et les paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ sont appelés respectivement, coefficient de dérive et coefficient de diffusion.

Définition 1.1.3. *Le mouvement brownien géométrique est obtenu en prenant l'exponentielle d'un mouvement brownien avec dérive. Soit $\{D(t), t \geq 0\}$ un processus de Wiener de coefficients de dérive μ et de diffusion σ^2 . On pose :*

$$Y(t) = e^{D(t)}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

Il possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} m_Y(y) &= \mu y - \frac{1}{2} \sigma^2 y, \\ v_Y(y) &= \sigma^2 y^2. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

1.1.2 Pont Brownien

Les processus vus en haut sont définis pour des valeurs de la variables t dans l'intervalle $[0, \infty)$. Le pont brownien est un processus assez intéressant qui est basé sur le mouvement brownien standard $\{B(t), t \geq 0\}$. Appelé parfois processus de Wiener attaché mais le plus souvent pont brownien, il est défini pour $t \in [0, 1]$ seulement. C'est un processus de diffusion conditionnel car on suppose que $B(1) = 0$. C'est comme si le processus ainsi obtenu était attaché à ses deux extrémités.

Définition 1.1.4. Soit $\{B(t), t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard. Le processus stochastique conditionnel $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$, où

$$Z(t) = B(t) - tB(1)$$

est appelé pont brownien.

1.1.3 Processus Gauss-Markov

$(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Gauss-Markov s'il est en même temps, Gaussien et possède la propriété de Markov. $(X_t)_{t \geq 0}$ satisfait aussi les propriétés suivantes

- Soit $h(t)$ une fonction non nulle de t , le processus $Z(t) = X(f(t))$ est un processus de type Gauss-Markov.
- Soit $f(t)$ une fonction non décroissante alors le processus $Z(t) = X(f(t))$ est un processus de type Gauss-Markov.

ce processus est caractérisé par les quantités suivantes :

- $m(t) = E[X_t]$
- $c(s, t) = E[(X_s - m(s))(X_t - m(t))] = \frac{c(s, u)c(u, t)}{c(u, u)}$ où $s < u < t$;
- $r(t) = \frac{h_1(t)}{h_2(t)}$.

1.1.4 Processus de diffusion et premier temps de passage

Soit X_t un processus de diffusion homogène. X_t est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

où B_t est un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité muni d'une filtration \mathcal{F}_t , avec un intervalle de diffusion $I = [r_1, r_2]$ où $r_1, r_2 \in (-\infty, \infty)$ et $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions lisses bornées.

Nous appelons une barrière un seuil qu'on définit, une barrière peut être constante, déterministe ou aléatoire. Soit $S(t)$ une barrière qui dépend du temps (déterministe), nous supposons que cette barrière est continue et différentiable. Et soit τ_S le premier temps où le processus X_t atteint cette barrière. On définit le premier temps de passage la variable aléatoire τ_S

$$\tau_S = \inf\{t > t_0 | X_t = S(t); X_{t_0} = x_0\} \quad (1.1.3)$$

et soit

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} \{P(X_t \leq x | X_\tau = y)\}, \tau < t, x \in I, y \in I, \quad (1.1.4)$$

la densité de probabilité du processus X_t contraint par la barrière absorbante $S(t)$.

$f(x, t|y, \tau)$ satisfait l'équation de Kolmogorov (Karlin, S. and Taylor, H. M. (1988)) :

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2(y, \tau)\frac{\partial^2 f(x, t|y, \tau)}{\partial y^2} + \mu(y, \tau)\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial y} = 0 \quad (1.1.5)$$

et l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f(x, t|y, \tau)}{\partial x^2} - \mu(x, t)\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} \quad (1.1.6)$$

Généralement, il n'y a pas une forme explicite pour la densité du premier temps de passage

d'un processus de diffusion à travers une barrière déterministe qui dépend du temps.

À ce jour, il existe que très peu de cas bien spécifiques qui peuvent fournir des formules fermés à ce problème. Par exemple dans le cas de processus Gaussien et de barrière de type Daniels, mais ceci sera abordé en détails au chapitre suivant. Nous allons citer dans la prochaine section quelques exemples où il est possible de calculer la probabilité du premier temps de passage d'un processus stochastique à travers plusieurs types de barrières.

1.2 Densité de premier temps de passage à travers une courbe constante

1.2.1 Densité de premier temps de passage d'un mouvement brownien standard

Soit B_t un mouvement brownien standard et $a \in \mathbb{R}$ une frontière constante, posons

$$\tau_a = \inf\{t : B_t \geq a\},$$

En utilisant la densité déjà connu de B_t en conditionnant sur τ_a on obtient

$$P(B_t \geq a) = P(B_t \geq a | \tau_a \leq t) P(\tau_a \leq t) + P(B_t \geq a | \tau_a > t) P(\tau_a > t) \quad (1.2.1)$$

par la continuité du processus $\{B_t, t \geq 0\}$ on a que

$$P(B_t \geq a | \tau_a > t) = 0$$

on obtient donc

$$P(\tau_a \leq t) = 2[1 - \Phi(a/\sqrt{t})] \quad (1.2.2)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= P(N(0, 1) \leq x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad -\infty < x < +\infty \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

la fonction de densité de τ_a , (1.2.2), est obtenue en dérivant la fonction (1.2.2) qui nous donne

$$f_{\tau_a} = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}t^3} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right), \text{ pour } t > 0. \quad (1.2.4)$$

Cette densité est un cas particulier de *la loi gaussienne inverse* ou *la loi de Wald*.

1.2.2 Densité de premier temps de passage d'un mouvement brownien quelconque

Soit X_t un mouvement brownien quelconque de la forme

$$X_t = x_0 + \mu t + \sigma B_t \quad (1.2.5)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Et posons

$$\underline{X}_t = \min_{0 \leq s \leq t} X_s, \quad t \geq 0. \quad (1.2.6)$$

La densité de probabilité de la fonction du minimum est donnée par

$$P(\underline{X}_t > y) = \Phi\left(\frac{x_0 + \mu t - y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu(y - x_0)}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{y + \mu t - x_0}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad y < x_0. \quad (1.2.7)$$

Si on définit τ_b comme étant le temps de premier temps de passage du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à travers la borne constante b , où

$$\tau_b = \inf\{t > 0 | X_t = b\}$$

et en remarquant que les événements suivant sont équivalents

$$\{\tau_b > t\} \iff \{\underline{X}_t > b\}$$

nous obtenons directement la loi du premier temps de passage qui est donnée par

$$P(\tau' > t) = \Phi\left(\frac{x_0 + \mu t - b}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu(b - x_0)}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{b + \mu t - x_0}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad t > 0.$$

Après avoir vu les cas de processus connus avec des barrières constantes nous allons montrer dans la prochaine section comment on peut obtenir l'expression analytique de la densité de premier temps de passage à travers une barrière déterministe. Cette densité va dépendre d'autres intégrales très difficiles à évaluer. Le raisonnement menant à ces expressions analytiques est brièvement exposé dans la section suivante.

1.3 Densité de premier temps de passage à travers une frontière déterministe

Soit $S(t)$ une frontière affine et définissons $\tau_{S(\cdot)}$, comme étant le premier temps de passage du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à travers la frontière $S(t)$ et posons $t_0 < t$

$$\tau_{S(\cdot)} = \inf\{t > 0 | X_t > S(t)\}.$$

La densité de probabilité du premier temps de passage est donnée par

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} P(\tau_S \leq t),$$

et soit

$$\begin{aligned} F(S(t), t | x_0, t_0) &= P(X(t) \leq S(t) | X(t_0) = x_0) \\ f(S(t), t | x_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial S(t)} F(S(t), t | x_0, t_0). \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

En utilisant le résultat de Fortet, 1943. Posons $t_0 < t$

$$P(X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0) = \int_{t_0}^t \left[\int_{S(t)}^{\infty} f(y, t | S(t'), t') dy \right] \cdot g(S(t'), t' | x_0, t_0) dt', \quad (1.3.2)$$

nous obtenons le résultat suivant

$$\begin{aligned} P(X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0) &= 1 - F(S(t), t | x_0, t_0) \\ &= \int_{t_0}^t \left[\int_{S(t)}^{\infty} f(y, t | S(t'), t') dy \right] \cdot g(S(t'), t' | x_0, t_0) dt'. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

En intégrant par rapport à la variable y et ensuite par rapport à t' et en utilisant le résultat de l'équation (1.3.3)

$$1 - F(S(t), t | x_0, t_0) = \int_{t_0}^t g(S(t'), t' | x_0, t_0) dt' - \int_{t_0}^t g(S(t'), t' | x_0, t_0) F(S(t), t | S(t'), t') dt'. \quad (1.3.4)$$

d'où le résultat

$$\int_{t_0}^t g(S(t'), t'|x_0, t_0) dt' = 1 - F(S(t), t|x_0, t_0) + \int_{t_0}^t g(S(t'), t'|x_0, t_0) F(S(t), t|S(t'), t') dt'. \quad (1.3.5)$$

En dérivant des deux cotés par rapport à t et après quelques manipulations algébriques nous obtenons cette équation de Volterra de 2^{me} espèce

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = -2\psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(t'), t'|x_0, t_0) \psi(S(t), t|S(t'), t') dt' \quad (1.3.6)$$

où

$$\psi(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} F(S(t), t|x_0, t_0).$$

En définissant

$$\Psi(S(t), t|x_0, t_0) = \psi(S(t), t|x_0, t_0) + \kappa(t) f(S(t), t|x_0, t_0) + r(t) [1 - F(S(t), t|x_0, t_0)]$$

où $\kappa(t)$ et $r(t)$ sont des fonctions continues sur $[t_0, \infty)$ et $x_0 < S(t_0)$. Nous obtenons après remplacement le résultat recherché

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(t'), t'|x_0, t_0) \Psi(S(t), t|S(t'), t') dt'. \quad (1.3.7)$$

Si par exemple nous souhaitons obtenir la densité $g(S(t), t|x_0, t_0)$ dans le cas de mouvement brownien à travers une frontière $S(t)$ et en utilisant les informations suivantes

$$\begin{aligned}
f(S(t), t|x_0, t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(S(t) - x_0)^2}{(t-t_0)}\right). \\
F(S(t), t|x_0, t_0) &= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{(S(t) - x_0)}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\right)\right]. \\
\text{où } \operatorname{Erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Nous devons calculé $\psi(S(t), t|x_0, t_0)$

$$\begin{aligned}
\psi(S(t), t|x_0, t_0) &= \frac{\partial F(S(t), t|x_0, t_0)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} e^{-z^2} \frac{\partial z}{\partial t}
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

après calcul nous obtenons

$$\psi(S(t), t|x_0, t_0) = f(S(t), t|x_0, t_0) \left[S'(t) - \frac{S(t) - x_0}{2(t-t_0)} \right] \tag{1.3.10}$$

et

$$\Psi(S(t), t|x_0, t_0) = f(S(t), t|x_0, t_0) \left[\kappa(t) + S'(t) - \frac{S(t) - x_0}{2(t-t_0)} \right] + r(t)(1 - F(S(t), t|x_0, t_0)) \tag{1.3.11}$$

Dans un cas général, l'équation (1.3.11) est très difficile à résoudre, mais il est possible d'obtenir un résultat dans le cas particulier où $r(t) = 0$, $\kappa(t) = -\frac{S'(t)}{2}$ et où on suppose que la frontière $S(t)$ est une frontière affine. On obtient donc $\Psi(S(t), t|S(t'), t') = 0$, pour à la fin obtenir le résultat

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{at_0 + b - x_0}{\sqrt{2\pi(t-t_0)^{3/2}}} \exp\left(\frac{(at + b - x_0)^2}{2(t-t_0)}\right). \tag{1.3.12}$$

Si $a = 0$ on retrouve la densité de l'inverse gaussienne.

Nous avons vu, à travers les différents cas, que dans le cas de barrières constantes ou affines il est possible d'avoir des formules explicites pour certains processus. Cependant dans le cas de barrières déterministes, le calcul devient rapidement très difficile voir impossible à effectuer. Nous proposons dans ce cas une autre approche afin de résoudre ce problème qui se base sur la simulation.

Dans le chapitre suivant nous allons aborder l'approche par simulation et proposer un algorithme afin de calculer la probabilité de premier temps de passage.

CHAPITRE II

2.1 Méthode de Monte Carlo

La méthode de simulation Monte Carlo est une des méthodes les plus simples et les plus connues en simulation basée sur la loi des grands nombres. En fixant un intervalle de temps et en divisant ce dernier en d'autres plus petits intervalle (sous-intervalle), on simule plusieurs trajectoires tout au long des points de la subdivision. Si il y a un passage, on marque le sous intervalle où ce dernier s'est produit. En général, le point milieu de ce sous-intervalle forme un estimé du premier temps de passage d'un chemin simulé. L'opération est répétée un grand nombre de fois afin de construire une estimation de la fonction de répartition ou la fonction de densité cumulative de ce temps d'arrêt.

Considérons un mouvement brownien W et une barrière linéaire $b(t) = \alpha + \beta(t)$, posons τ la variable aléatoire représentant le temps du premier passage, fixons les constantes $\alpha > 0$ et l'échéance $T > 0$. La probabilité d'avoir un premier passage à l'instant τ avant la fin de la période à T est donnée par :

$$P[\tau \leq T] = \Phi\left(-\frac{\alpha + \beta T}{\sqrt{T}}\right) + e^{-2\alpha\beta} \Phi\left(\frac{-\alpha + \beta T}{\sqrt{T}}\right). \quad (2.1.1)$$

La densité est égale à

$$f(t) = \frac{\alpha}{t^{\frac{3}{2}}} \Phi\left(\frac{\alpha + \beta t}{\sqrt{t}}\right) \quad (2.1.2)$$

car

$$\Phi\left(\frac{\alpha + \beta T}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^t \Phi(\beta\sqrt{t-s}) f(s) ds. \quad (2.1.3)$$

2.1.1 Exemples

Il existe dans la littérature une idée ingénieuse qui, idéalement, consiste à obtenir la loi de probabilité d'un passage de la trajectoire à travers des points simulés. Ainsi, considérons un mouvement brownien W et une barrière linéaire $S(t) = \alpha + \beta t$ alors pour $\alpha > 0$ et $T > 0$, de la théorie classique nous pouvons calculer aisément la probabilité du premier temps de passage par (2.1.4).

Posons $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$ et $T = 1$. Le Tableau 2.1 ci-dessous représente plusieurs estimateurs de la probabilité du premier temps de passage à travers une courbe S avec plusieurs valeurs de la variable N qui représente le nombre de chemins simulés, et différentes valeurs de pas de discrétisation Δt . Nous remarquons clairement que, même dans ce cas simple, afin d'obtenir un bon estimateur de notre probabilité, dont la valeur exacte est donnée par $P(\tau_S \leq T) = 0.5548$, on a besoin de simuler un grand nombre de chemins avec une partition de plus en plus fine de l'intervalle où la probabilité est recherchée.

Un autre inconvénient de l'approche Monte Carlo est qu'elle tend à sur-estimer la valeur du premier temps de passage, car un passage peut survenir bien avant entre les points simulés comme il est montré dans la Figure 2.2.

Voici un autre exemple du calcul de la probabilité de Monte Carlo par simulation en utilisant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à travers une barrière linéaire $y(t) = \alpha + \beta t$ tel que $\alpha > 0$. L'équation est donnée par :

| $P(\tau_S \leq 1.0)$ | $\Delta t = 10^{-2}$ | $\Delta t = 10^{-3}$ | $\Delta t = 10^{-4}$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $N = 10^4$ | 0.5096 | 0.5407 | 0.5487 |
| $N = 10^5$ | 0.5102 | 0.5390 | 0.5506 |
| $N = 10^6$ | 0.5122 | 0.5412 | 0.5504 |

Tableau 2.1 Probabilité de passage par rapport à différents pas de discrétisation Δt et nombre de chemin N

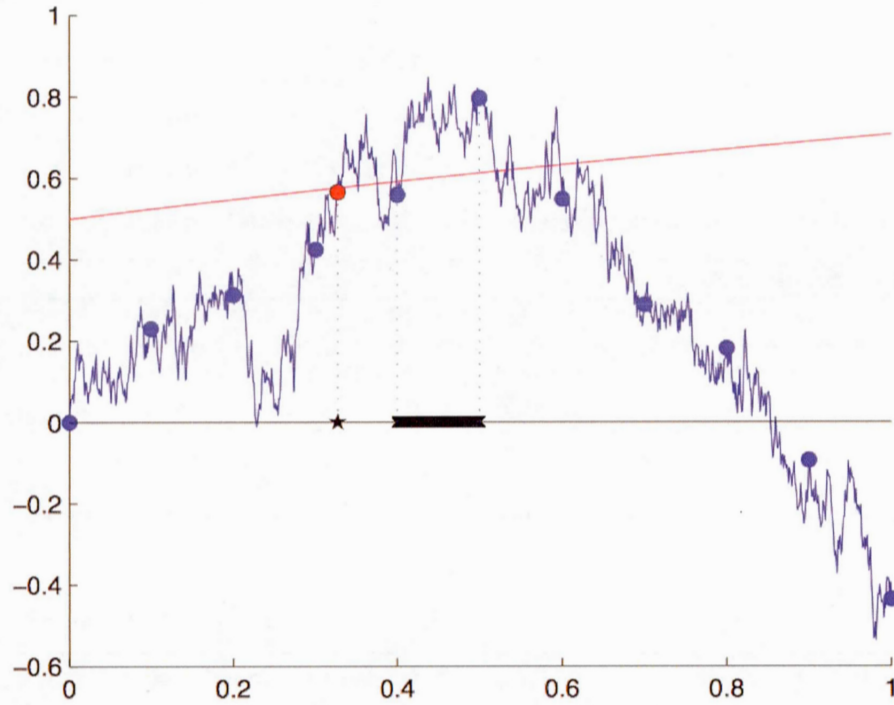


Figure 2.1 Premier passage non détecté à travers une simulation Monte Carlo basique.

$$dS_t = \lambda(\mu - S_t)dt + \sigma dW_t. \quad (2.1.4)$$

où W_t est un mouvement brownien, $\lambda > 0$, μ et $\sigma > 0$ qui représente la volatilité sont des paramètres déterministes. Le tableau 2.2 nous donne les différentes valeurs de la probabilité de Monte Carlo pour un nombre de trajectoire $N = 10000$.

| | $\sigma = 0.6$ | | $\sigma = 0.9$ | | $\sigma = 1.2$ | |
|-----------------------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|
| Pas de discrétisation | Proba | Temps | Proba | Temps | Proba | Temps |
| $\Delta t = 10^{-1}$ | 0.1620 | 0.3169 | 0.4050 | 0.3039 | 0.5690 | 0.3186 |
| $\Delta t = 10^{-2}$ | 0.1750 | 0.3418 | 0.4540 | 0.3429 | 0.6250 | 0.3481 |
| $\Delta t = 10^{-3}$ | 0.2120 | 0.6048 | 0.4720 | 0.3429 | 0.6640 | 0.6041 |

Tableau 2.2 Probabilité de passage à travers y par rapport à différents pas de discrétisation Δt et différentes valeurs de la volatilité σ .

Nous remarquons encore une fois que plus les pas de discrétisation Δt sont petits, plus la probabilité s'améliore, le même constat se fait pour la volatilité σ plus la volatilité est grande plus le processus aura tendance à faire des sauts beaucoup plus important et donc atteindre la rapidement la barrière.

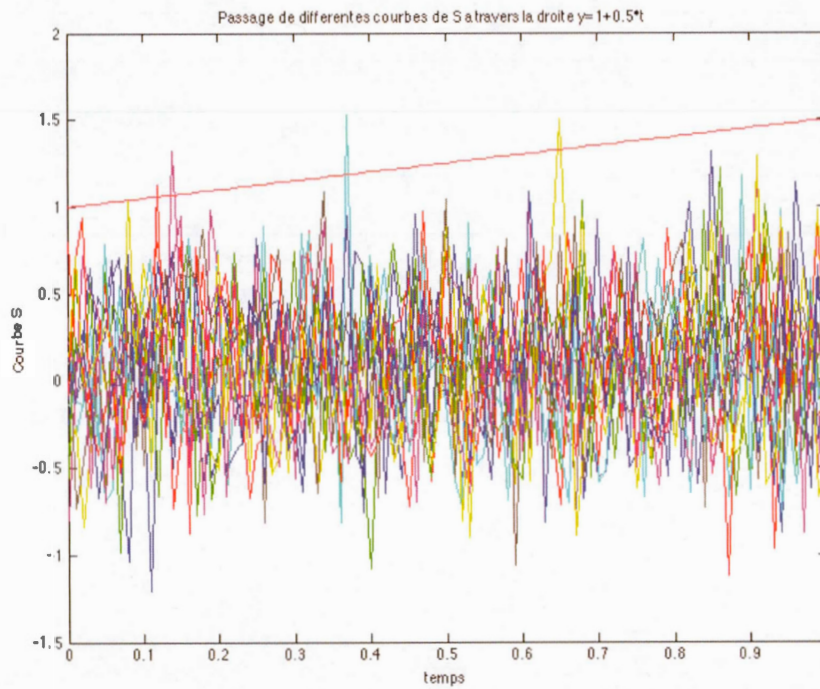


Figure 2.2 Simulation des passages de N processus d'Ornstein-Uhlenbeck à travers une barrière linéaire $y(t)$.

Au lieu de faire des simulations Monte Carlo en augmentant à chaque fois le nombre de chemins simulés, ce qui entrainera des temps de calcul de plus en plus long, nous proposons dans ce travail d'améliorer cette estimation.

2.2 Problématique

Le problème auquel nous nous intéressons consiste à trouver une méthode qui nous permettrait de déterminer la probabilité du premier temps de passage d'un processus stochastique à travers une courbe déterministe. Nous commencerons d'abord par la simulations des différents chemins. Nous avons opté pour le schéma d'Euler. Ce schéma est utilisé pour simuler des équations différentielles stochastiques (ou processus de diffusion) comme celle vu dans

(1.1.2)

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, X_0 = x_0$$

où B_t est un mouvement brownien.

La solution exacte est donnée par

$$X_h = X_0 + \int_0^h \mu(X_s)ds + \int_0^h \sigma(X_s)dB_s \quad (2.2.1)$$

et le schéma d'Euler de l'équation différentielle stochastique est donné par

$$X_h = X_0 + \mu(X_0)dt + \sigma(X_0)(B_h - B_0). \quad (2.2.2)$$

Nous avons dans la figure 2.3 un processus stochastique simulé sur un intervalle de temps $[0, 7]$ qui atteint la frontière déterministe en rouge vers l'instant $t = 4.3$. La question qui se pose est : est-ce que $t = 4.3$ est vraiment le premier temps de passage ? c'est à dire si le pas de simulation était plus petit, est-ce qu'on aurait pu détecter un éventuel passage prématuré de la trajectoire ? En effet, nous remarquons qu'à $t = 2.5$ le processus stochastique était très près de la barrière mais sans l'atteindre.

En simulant ce processus selon ce schéma (ou selon un autre) nous obtenons en réalité des points que le logiciel va relier par la suite pour nous donner une courbe. La figure 2.4 est un agrandissement d'une certaine partie de la courbe qui est très proche de la frontière.

Supposons maintenant qu'on raffine notre simulation : nous remarquons dans la figure 2.4, qu'il y a un passage prématuré de la courbe non détecté par la simulation initiale.

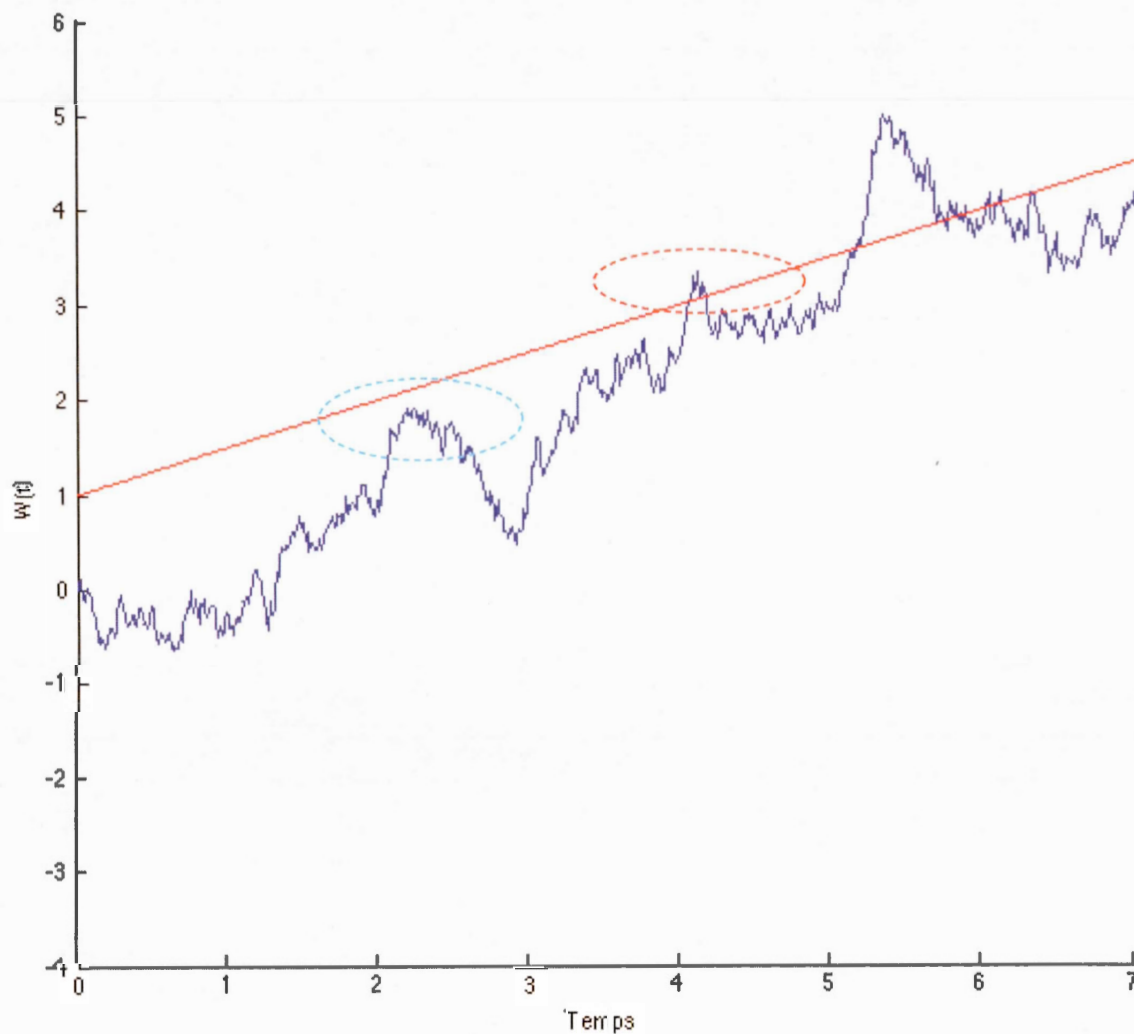


Figure 2.3 Éventuel passage non détecté par le processus stochastique à travers la courbe déterministe.

2.3 L'approche Monte Carlo avec simulation de passage inter-temporel

Au lieu de répéter un grand nombre de fois l'ensemble de la méthode de Monte-Carlo, avec des partitions de plus en plus fines de l'intervalle de simulation, voyons comment on pourrait améliorer les estimations initiales sans rejeter les chemins simulés.

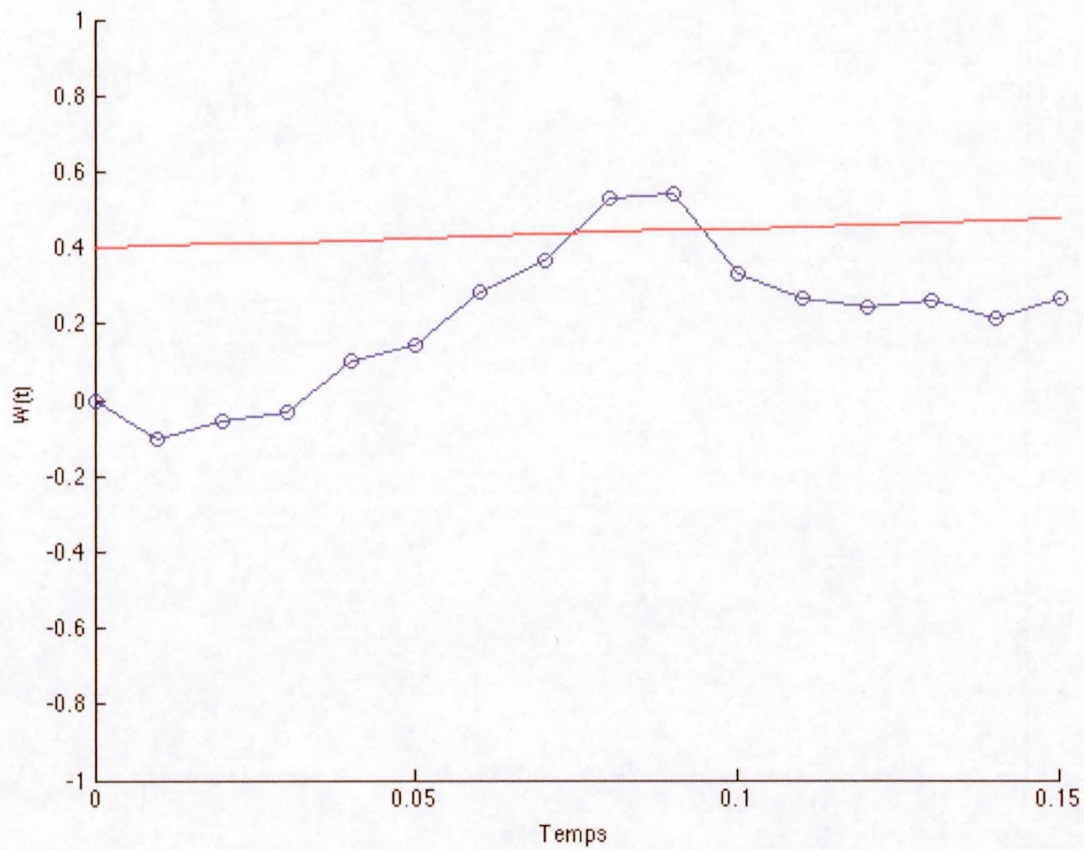


Figure 2.4 Agrandissement d'une partie de la trajectoire du processus stochastique.

Une idée astucieuse, qui a été mise en avant par plusieurs auteurs, est d'obtenir idéalement la loi de probabilité d'un passage entre les différents points simulés. Nous allons alors calculer une probabilité de passage entre deux points simulés. Soit p_k la probabilité de passage dans l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, on pourrait simplement générer une valeur U_k prise d'une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ et d'affirmer qu'il existe un passage si $U_k \leq p_k$.

Dans le cas particulier de modélisation par pont brownien où le processus est représenté par un mouvement brownien avec dérive de la forme

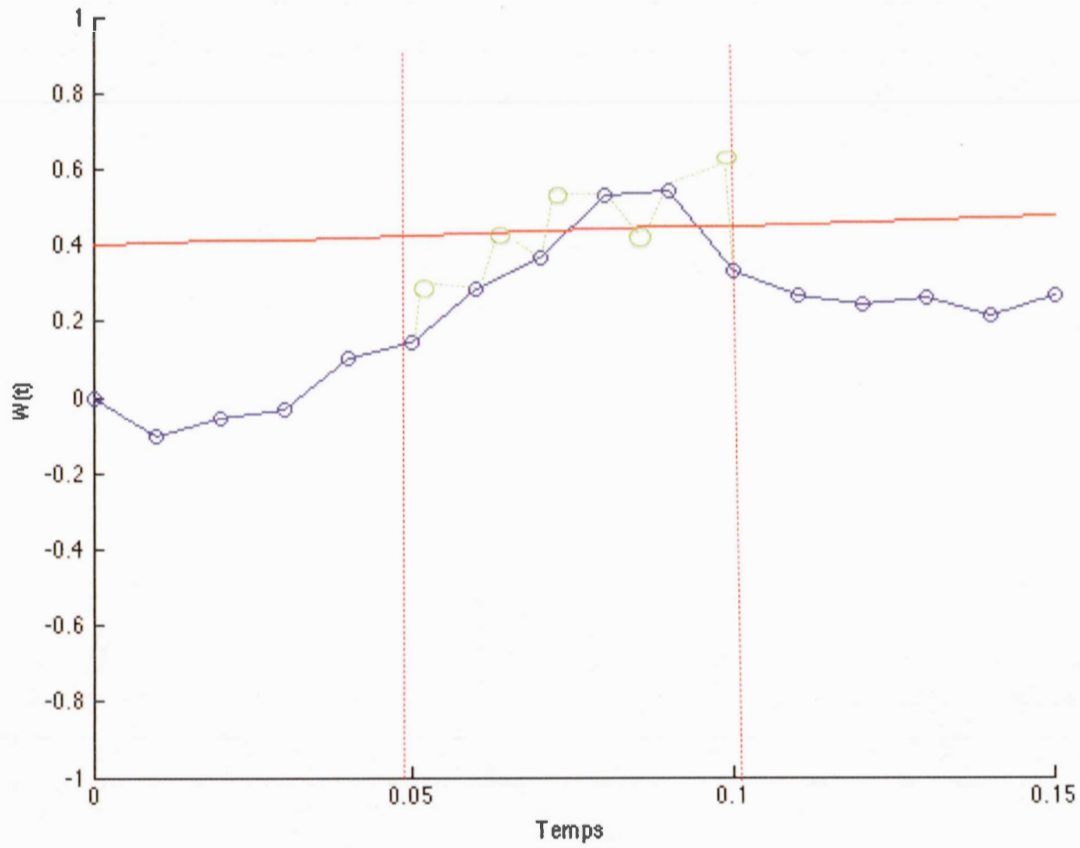


Figure 2.5 Représentation de deux trajectoires superposées représentant le même processus stochastique mais avec des pas de discétisation Δt différents.

$$Y(t) = y_0 + \mu t + \sigma W(t)$$

et soient t_i et t_{i+1} représentant respectivement les instants de début et de fin du pont brownien, nous obtenons les valeurs respectives $Y(t_i) = y_i$ et $Y(t_{i+1}) = y_{i+1}$ où $y_i, y_{i+1} < S$ et que S est le seuil à franchir (le seuil peut être aussi une fonction déterministe en fonction de t de la forme $S(t)$) tel que $S > y_0$.

La probabilité qu'un pont brownien reliant les valeurs y_i et y_{i+1} traverse le niveau S la

première fois à un instant aléatoire τ est donnée par

$$p_i = P(\tau \in [t_i, t_{i+1}]) = \exp \left\{ -2 \frac{(S - y_{i+1})(S - y_i)}{\sigma^2(t_{i+1} - t_i)} \right\}. \quad (2.3.1)$$

Mais dans le cas de pont de diffusion la probabilité exacte du premier temps de passage est dans un grand nombre de cas inconnue ou difficile à calculer.

2.3.1 Approximation d'un pont de diffusion

Nous avons vu au début de ce mémoire qu'il exister différents méthodes pour l'approximation d'un pont de diffusion et après quelques manipulation nous pouvons utiliser un pont brownien afin d'utiliser les résultats de (2). Nous allons utiliser une approximation local de la barrière déterministe par une courbe déterministe donnée par

$$S(t) = \frac{\alpha}{2} - \frac{t}{\alpha} \ln \left(\frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_2 e^{-\alpha^2/t}}}{2} \right) \quad (2.3.2)$$

dite courbe de Daniels (8) où $c_1 > 0$ et $c_2 \in \mathbb{R}$, pour laquelle nous avons une formule exacte pour la probabilité de premier passage d'un processus stochastique à travers cette dernière (2.3.2).

Proposition 2.3.1. *Considérons le pont brownien $W^{0,\Delta t}$ défini sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t]$ et soit $S(t)$ une courbe de Daniel, où $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow \Delta t} \beta^2 + 4\gamma e^{-\alpha^2/t} > 0$.*

Si

$$\tau_S = \inf\{0 \leq t \leq \Delta t | W^{0,\Delta t}(t) = S(t)\},$$

alors

$$P(\tau_S \leq \Delta t) = \beta e^{-\frac{\alpha^2}{2\Delta t}} + \gamma e^{-\frac{2\alpha^2}{\Delta t}}.$$

Cette proposition est une application directe du Théorème 3.4 de Di Nardo et al (2), qui annonce sous certaines hypothèses le Théorème suivant :

Théorème 2.3.2. Soient $S(t)$ une courbe de Daniel, $\alpha, \beta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^b g[S(t; t_0), t|y(t_0), t_0] dt = & 1 - \lim_{t \rightarrow b} F[S(t), t|y(t_0), t_0] \\ & + \beta \exp \left\{ -\frac{2d_1^*[u(t_0) - y(t_0)]}{h_2(t_0)} \right\} \lim_{t \rightarrow b} F[S(t), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] \\ & + \gamma \exp \left\{ -\frac{4[2d_1^* - d_1][u(t_0) - y(t_0)]}{h_2(t_0)} \right\} \lim_{t \rightarrow b} F[S(t), t|4u(t_0) - 3y(t_0), t_0] \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

où $g[S(t; t_0), t|y(t_0), t_0]$ représente la densité de premier temps de passage du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et F la fonction de distribution d'un processus normal avec une moyenne conditionnelle et une variance.

Quand t tend vers b la limite de la fonction de répartition tendra vers 1, d'où le résultat de la Proposition 2.3.1.

Proposition 2.3.3. Soit $[0, \Delta t]$ un intervalle de temps, considérons les points $(0, a)$, $(\Delta t/2, b)$ et $(\delta t, c)$ et posons $A = e^{\frac{2a^2}{\Delta t}}$, $B = e^{-\frac{4ab}{\Delta t}}$ et $C = e^{-\frac{2ac}{\Delta t}}$ où

$$\frac{1}{A^2} < \frac{B}{C} < \frac{1}{A} + \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{A^2}$$

Alors il existe une unique courbe de Daniels (2.3.2) passant par les trois points avec les paramètres

$$\begin{aligned} \alpha &= 2a, \\ \beta &= \frac{A(A^4 B^2 - C^2)}{A^3 B - C}, \\ \gamma &= A^4 C^2 - \beta A^3 C. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Preuve : En remplaçant les coordonnées des trois points que traverse la courbe de Daniels dans l'équation (2.3.2), nous obtenons le système d'équations non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} = a. \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\Delta t}{2\alpha} \ln \left[\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma e^{-2\alpha^2/\Delta t}}}{2} \right] = b. \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\Delta t}{\alpha} \ln \left[\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma e^{-2\alpha^2/\Delta t}}}{2} \right] = c. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

De façon évidente, la première équation donne $\alpha = 2a > 0$, tandis que par une simple manipulation algébrique des deux équations suivantes nous sommes amenés à résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \beta \exp \left\{ \frac{\alpha^2 - 2\alpha b}{\Delta t} \right\} + \gamma \exp \left\{ -\frac{2\alpha^2}{\Delta t} \right\} = \exp \left\{ \frac{2\alpha^2 - 4\alpha b}{\delta t} \right\}, \\ \beta \exp \left\{ \frac{\alpha^2 - \alpha b}{\Delta t} \right\} + \gamma \exp \left\{ -\frac{\alpha^2}{\Delta t} \right\} = \exp \left\{ \frac{\alpha^2 - 2\alpha b}{\delta t} \right\}, \end{cases}$$

qui peut être écrit sous cette forme :

$$\begin{cases} \beta A^6 B + \gamma = A^8 B^2, \\ \beta A^3 C + \gamma = A^6 C^2. \end{cases}$$

Comme $A^6 B - A^3 C = A^3(A^3 B - c) > 0$, il existe une solution unique donnée par :

$$\beta = \frac{A(A^4 B^2 - C^2)}{A^3 B - C}$$

$$\gamma = A^4 C^2 - \beta A^3 C = A^7 B C \left[\frac{C - AB}{A^3 B - C} \right].$$

Cela constituerait la solution au système d'origine à condition que $\beta > 0$ and $\lim_{t \rightarrow \delta t} \beta^2 + 4\gamma e^{-\alpha^2/t} > 0$.

Notons d'abord que $\frac{1}{A^2} < \frac{B}{C} \Rightarrow A^4 B^2 - C^2 > 0$ et donc $\beta > 0$ et si de plus $\frac{B}{C} \leq \frac{1}{A}$, alors $\gamma \geq 0$ et nous la condition $\lim_{t \rightarrow \delta t} \beta^2 + 4\gamma e^{-\alpha^2/t} > 0$ est clairement satisfaite. Si nous supposons maintenant que $\frac{B}{C} > \frac{1}{A}$ alors $\gamma < 0$, nous devons alors vérifier que $\beta^2 + \frac{4\gamma}{A^2} > 0$, ce qui est le cas puisque

$$\begin{aligned} \beta^2 + \frac{4\gamma}{A^2} &= \frac{A^2(A^4 B^2 - C^2)^2}{(A^3 B - C)^2} + 4A^4 BC \left[\frac{C - AB}{A^3 B - C} \right]. \\ &= \frac{A^2}{(A^3 B - C)^2} \left((A^4 B^2 - C^2)^2 + 4A^3 BC(C - AB)(A^3 B - C) \right). \\ &= \frac{A^2}{(A^3 B - C)^2} (A^4 B^2 + C^2 - 2A^3 BC). \end{aligned}$$

La dernière étape est de s'assurer que cela résout le système d'origine. En substituant dans (2.3.5), (où seules les racines carrées positives ne sont impliqués), nous voyons que c'est le cas seulement si $A^4 B^2 + C^2 - 2A^3 BC < 0$, ou bien de façon équivalente

$$\left(\frac{B}{C} - \frac{1}{A} \right)^2 < \frac{A^2 - 1}{A^4}.$$

Ce qui est vérifié par (2.3.4).

L'algorithme du premier temps de passage se résume dans ces étapes :

Étape 1. Application de la transformation de Lamperti pour le processus de diffusion d'origine et à la frontière S afin d'obtenir le nouveau processus obtenu et la nouvelle frontière $S^* = F(S(t))$;

Étape 2. Sélectionnez un intervalle de temps $[T_l, T_u]$ et construire une partition

$$T_l = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_u;$$

Étape 3. Initialiser le vecteur compteur des premiers temps de passage à $\tau := \{0, \dots, 0\}$;

Étape 4 Initialiser le compteur des chemins $k = 1$;

Tant que k est inférieur à N le nombre de chemins simulés faire :

Étape 5. Simuler des chemins du processus $\{Y(t_1), \dots, Y(t_n)\}$;

Étape 6. Initialiser le compteur des sous-intervalles $i = 1$.

Tant que i est inférieur à n le nombre de sous-intervalles, faire

Étape 7. Si $Y(t_i) \geq S^*(t_i)$ mettre la i -ème composante du vecteur de densité de premier temps de passage à $\tau_i := \tau_i + 1$, le compteur de chemin $k := k + 1$, revenir à Etape 5.

Étape 8. Posons $\Delta := t_i - t_{i-1}$, $a := S(t_{i-1}) - Y(t_{i-1})$, $b := S(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}) - Y(\frac{t_{i-1}+t_i}{2})$, $c := S(t_i) - Y(t_i)$, et enfin posons A, B, C, α, β et γ tels qu'expliquer précédemment ;

Étape 9. Si $\frac{1}{A^2} < \frac{B}{C} < \frac{1}{A} + \frac{\sqrt{A^2-1}}{A^2}$, Posons $c_1 := \beta$, $c_2 := \gamma$ Si $\frac{1}{A^2} \geq \frac{B}{C}$ Posons $c_1 := 0$, $c_2 := A^4 C^2$; Si $\frac{B}{C} \geq \frac{1}{A} + \frac{\sqrt{A^2-1}}{A^2}$ Posons $c_1 := 2AC$, $c_2 := -A^4 C^2$;

Étape 10. Mettre la probabilité de passage à $p = c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{2\Delta}} + c_2 e^{-\frac{\alpha^2}{\Delta}}$;

Étape 11. Générer une valeur à U , tel que U est une variable aléatoire uniforme;

Étape 12. Sinon si $U \leq p$, Posons $\tau_i := \tau_i + 1$ et le conteur $k = k + 1$, allez à Etape 5; Poser $i = i + 1$, allez à Étape 7.

Notez que l'Etape 9 comprend les cas extrêmes où le point milieu de la frontière dans un sous-intervalle ne peut être atteint par une courbe de Daniel $S(\cdot)$, nous utilisons alors la courbe la plus proche.

Data: N, n, T

Result: Probabilités de premier temps de passage

Application de la transformation de Lamperti;

Sélectionnez un intervalle $[T_l, T_u]$;

construire la partition $T_l = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_u$;

Initialiser $\tau := \{0, \dots, 0\}$;

$k = 1$;

while $k < N$ **do**

 Simuler des chemins $\{Y(t_1), \dots, Y(t_n)\}$;

$i = 1$;

while $i < n$ **do**

if $Y(t_i) \geq S^*(t_i)$ **then**

$\tau_i := \tau_i + 1$;

$k := k + 1$;

end

$\Delta := t_i - t_{i-1}$; $a := S(t_{i-1}) - Y(t_{i-1})$; $b := S(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}) - Y(\frac{t_{i-1} + t_i}{2})$; $c := S(t_i) - Y(t_i)$;

$A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$;

if $\frac{1}{A^2} < \frac{B}{C} < \frac{1}{A} + \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{A^2}$ **then**

$c_1 := \beta$; $c_2 := \gamma$;

end

if $\frac{1}{A^2} \geq \frac{B}{C}$ **then**

$c_1 := 0$; $c_2 := A^4 C^2$;

end

if $\frac{B}{C} \geq \frac{1}{A} + \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{A^2}$ **then**

$c_1 := 2AC$; $c_2 := -A^4 C^2$;

end

$p = c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{2\Delta}} + c_2 e^{-\frac{\alpha^2}{\Delta}}$;

$U = U(0, 1)$;

if $U \leq p$ **then**

$\tau_i := \tau_i + 1$; $k = k + 1$;

else

$i = i + 1$;

end

end

end

Algorithm 1: Algorithme de premier temps de passage

CHAPITRE III

Dans ce chapitre, nous illustrons ce qui a été exposé au chapitre précédant par des exemples. Nous concentrons nos exemples sur les processus de diffusion qui peuvent être simulés de façon exacte.

Exemple 1 Considérons le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $X(t)$ et soit une barrière déterministe $S(t)$

$$\begin{aligned}dX(t) &= (1.0 - 0.5X(t))dt + dW(t), X(0) = 1.6, \\ S(t) &= 2.0(1.0 - \sinh(0.5t)).\end{aligned}$$

Ce processus de diffusion est un processus de Gauss-Markov et selon Di Nardo et al (2), la frontière choisie nous permet d'obtenir une formulation explicite de la densité de premier temps de passage donnée par :

$$f(S(t), t) = \frac{e^{0.5t}}{\sinh(0.5t)} \phi_0(S(t))$$

où ϕ_0 est la fonction de répartition du processus d'Ornstein-Uhlenbeck débutant à $X(0) = 0$.

□

La figure 3.1 compare la vraie densité de premier temps de passage avec la densité empirique en histogramme obtenue par notre algorithme, et en utilisant un pas de discrétisation égal à 0.01 et en simulant 10 000 trajectoires. De plus, l'algorithme nous donne une esti-

mation de la probabilité du premier temps de passage égale à 0.9622 sur tout l'intervalle par rapport à la vraie valeur de 0.9608 soit une erreur relative d'environ 0.15%.

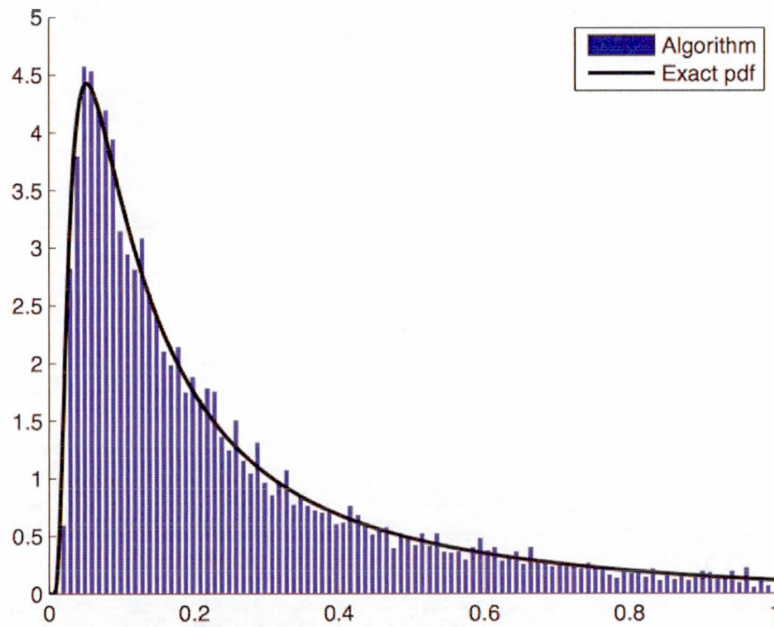


Figure 3.1 Densité de la probabilité du premier temps de passage d'un processus Ornstein-Uhlenbeck à travers une barrière $S(t) = 2.0(1.0 - \sinh(0.5t))$.

Exemple 2 Soit le mouvement brownien géométrique et la barrière linéaire suivants :

$$dX(t) = 5.0X(t)dt + 2.5X(t)dW(t), X(0) = 0.5,$$

$$S(t) = 1.0 + 2.0t.$$

En appliquant la transformation de Lamperti au processus et à la barrière, nous obtenons respectivement

$$dY(t) = 0.75dt + dW(t), Y(0) = 0.4 \ln(0.5).$$

$$S^*(t) = 0.4 \ln(1.0 + 2.0t).$$

Comme dans l'exemple précédent, ce processus de diffusion transformé est aussi un processus de Gauss-Markov et bien que la nouvelle barrière ne permette pas une densité de premier temps de passage explicite, en utilisant l'algorithme déterministe de Di Nardo et al (2) avec un pas de discrétisation de 0.01, nous pouvons obtenir une approximation fiable.

La figure 3.2 compare la densité du premier temps de passage approximée par la méthode de Di Nardo avec la densité empirique en histogramme obtenue par notre algorithme en utilisant le même pas de discrétisation et avec 10 000 chemins simulés. De plus, l'algorithme nous donne un estimateur de la probabilité de premier temps de passage égale à 0.8251 sur tout l'intervalle par rapport à la vraie valeur de 0.8258 soit une erreur relative d'environ 0.08%.

□

Exemple 3 On considère dans cet exemple un processus de Cox-Ingersoll-Ross modifié et une barrière linéaire $S(t)$ définis par

$$dX(t) = -0.5X(t)dt + \sqrt{1 + X(t)^2}dW(t), X(0) = 0,$$

$$S(t) = 0.3 + 0.2t.$$

En appliquant la transformation de Lamperti au processus et à la barrière nous obtenons respectivement

$$dY(t) = -\tanh(Y(t))dt + dW(t), Y(0) = 0,$$

$$S^*(t) = \operatorname{arcsinh}(0.3 + 0.2t).$$

Contrairement aux exemples précédents, ce processus de diffusion transformé n'est pas gaussien, mais en utilisant l'algorithme exact de Beskos et Roberts (4) nous pouvons simuler des échantillons de chemin exacts.

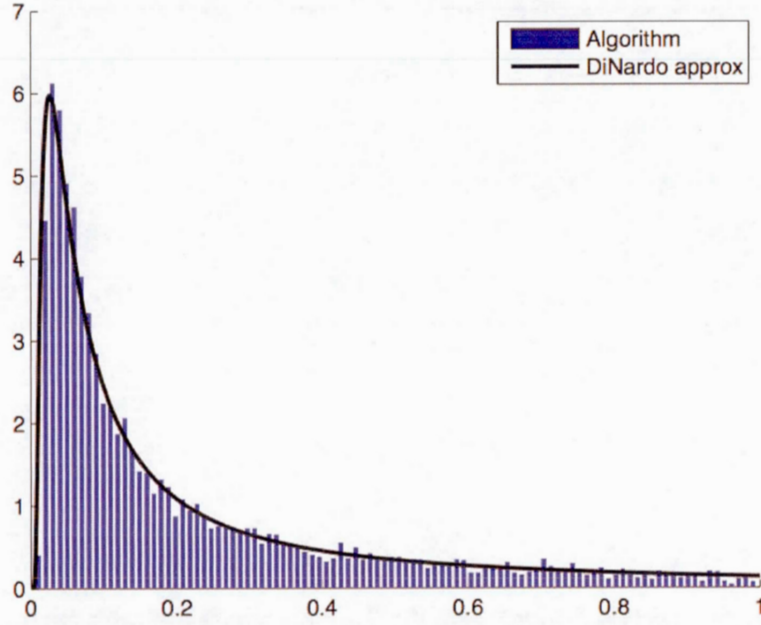


Figure 3.2 Densité de la probabilité du premier temps de passage d'un mouvement brownien géométrique à travers une barrière $S(t) = 1.0 + 2.0t$.

Bien que la densité explicite de premier temps de passage ne soit pas disponible, en utilisant les résultats de Downes et Borovkov (3), nous pouvons, dans ce cas, obtenir les bornes inférieures et supérieures suivantes :

$$f_L(S(t), t) = \frac{1}{t} \left(S(t) - \frac{0.2t}{\sqrt{1.09}} \right) \frac{e^{-0.5}}{\cosh(S(t))} \phi_W(S(t)),$$

$$f_U(S(t), t) = \frac{1}{t} \left(S(t) - \frac{0.2t}{\sqrt{1.25}} \right) \frac{e^{-0.5}}{\cosh(S(t))} \phi_W(S(t))$$

où Φ_W est la fonction de répartition d'un mouvement brownien standard.

La figure 3.3 compare les limites de la probabilité du premier temps de passage avec l'histogramme de la densité empirique obtenue par notre algorithme en utilisant un pas de discrétisation égal à 0,01. On commence au départ avec

15 000 simulations dont 11 768 chemins qui sont valides par le biais de l'algorithme exact. De plus, l'algorithme propose une estimation de la probabilité de premier temps de passage égale à 0,7398 sur tout l'intervalle qui se trouve entre $\int_0^T f_L(S(t), t)dt = 0.6204$ et $\int_0^T f_U(S(t), t)dt = 0.7673$.

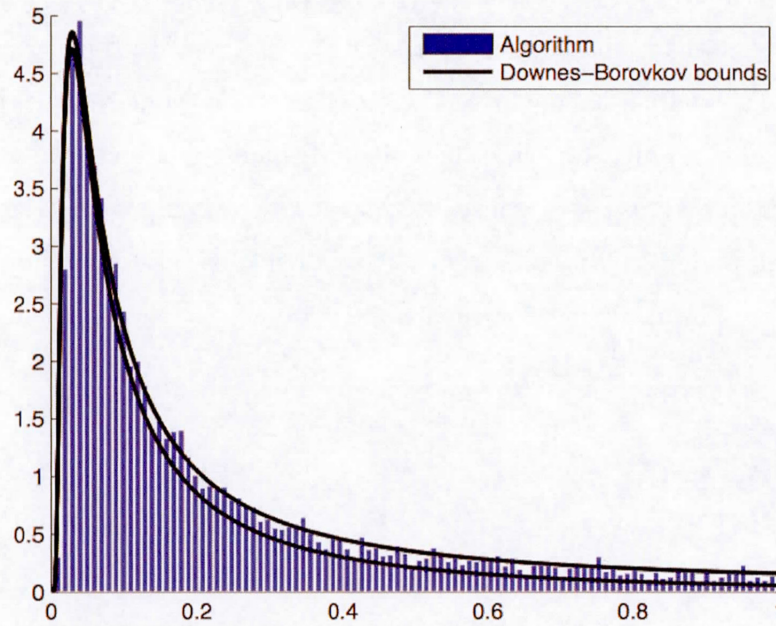


Figure 3.3 Densité de la probabilité du premier temps de passage d'un CIR modifié à travers la barrière $S(t) = 0.3 + 0.2t$.



3.1 Résultats de simulation

Nous avons testé notre algorithme (Algorithme de Probabilité de Passage APP) en comparant des résultats simulés de la probabilité du premier temps de passage par rapport au temps, par deux méthodes performantes celle de Di Nardo et al (2) et la méthode Monte Carlo. Tout en augmentant le nombre de chemins simulés N (nombre de trajectoires simulés) nous observons le comportement de la probabilité du premier temps de passage calculée par notre algorithme. Nous avons utilisé deux barrières pour un processus stochastique qui modélise l'équation de Black-Scholes. Nous allons aussi faire varier le pas de discrétisation Δt qui représente l'intervalle de temps entre deux points browniens simulés, plus Δt est petit meilleur sera la simulation.

3.1.1 Exemple 1

La probabilité exacte du premier temps de passage de cette exemple est égale à 0.5485.

Nous fixons $N = 10$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|------------------|------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.5000, t=0.1145 | 0.6000, t=0.0629 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.5000, t=0.0649 | 0.5000, t=0.0739 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.4000, t=0.0408 | 0.4000, t=0.0753 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.6000, t=0.0290 | 0.6000, t=1.2752 |

Tableau 3.1 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10$.

Nous remarquons ici pour un nombre très petit de chemins simulés la probabilité est assez instable et est en moyenne égale à 0.5.

En fixant $N = 100$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|------------------|-------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.4400, t=0.0694 | 0.5500, t=0.0922 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.5100, t=0.0574 | 0.5300, t=0.0884 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.5300, t=0.0524 | 0.5400, t=0.1574 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.5500, t=0.8473 | 0.5520, t=19.2752 |

Tableau 3.2 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 100$.

En augmentant le nombre de chemins simulés, nous remarquons que la probabilité se stabilise en moyenne autour de 0.54. Cette probabilité est approchée par l'algorithme de Monte Carlo seulement après une discrétisation. Notre algorithme est cependant instable, idem pour l'algorithme de Monte Carlo, également cela s'exprime par le nombre de chemins simulés N qui reste insuffisant.

En fixant $N = 1000$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|------------------|------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.4420, t=0.0753 | 0.5540, t=0.1418 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.5010, t=0.0667 | 0.5420, t=0.3600 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.5239, t=0.2336 | 0.5350, t=2.3395 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.5239, t=0.2336 | 0.5350, t=2.3395 |

Tableau 3.3 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 1000$.

En augmentant encore la variable N nous remarquons que l'algorithme de Monte Carlo n'arrive toujours pas à obtenir le bon résultat, mais ceci est obtenu par notre algorithme, cela dit ce dernier reste instable pour des pas de discrétisation assez petits.

En fixant $N = 10000$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|------------------|--------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.4293, t=0.0717 | 0.5449, t=1.1755 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.4293, t=0.0739 | 0.5524, t=1.4189 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.5080, t=0.1695 | 0.5487, t=10.4908 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.5328, t=1.6684 | 0.5451, t=107.2411 |

Tableau 3.4 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10000$.

Finalement pour N assez grand, notre algorithme se stabilise autour de cette valeur.

La probabilité de Di Nardo est égale 0.5484 avec un temps de calcul égale à 19.5625.

3.1.2 Exemple 2

Fixant maintenant une autre barrière $S(t) = t \cdot \log(t + 1) + 1$. La probabilité de premier temps de passage est égale à 0.1772.

En fixant $N = 10$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|------------------|------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.1000, t=0.0468 | 0.2000, t=0.0644 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.2000, t=0.0443 | 0.3000, t=0.0615 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.2000, t=0.0462 | 0.2000, t=0.0865 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.2000, t=0.0332 | 0.2000, t=1.0915 |

Tableau 3.5 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10$.

Les deux algorithmes donnent en moyenne des résultats proches.

En fixant $N = 100$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|------------------|------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.1500, t=0.0444 | 0.1900, t=0.0655 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.1000, t=0.0470 | 0.1200, t=0.1078 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.1600, t=0.0650 | 0.1700, t=0.2674 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.2100, t=0.1147 | 0.2200, t=2.7264 |

Tableau 3.6 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 100$.

En augmentant le nombre chemins simulés, notre algorithme et l'algorithme de Monte Carlo, approchent la probabilité en donnant des valeurs qui sont supérieures ou inférieures à la vraie probabilité mais notre algorithme à cependant pu donner une meilleur estimateur de cette probabilité car pour un pas de discrétisation égale à 0.001 nous obtenons une valeur égale à 0.17.

En fixant $N = 1000$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|------------------|-------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.1900, t=0.0444 | 0.1600, t=0.0655 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.1820, t=0.0597 | 0.1750, t=0.5850 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.1820, t=0.3058 | 0.1880, t=5.4262 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.1730, t=0.9307 | 0.1750, t=38.6026 |

Tableau 3.7 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 1000$.

En augmentant encore plus la variable N , nous remarquons que nous avons encore un meilleur estimateur avec notre algorithme que par l'algorithme Monte Carlo qui surestime la probabilité et il donne un bon estimateur qu'après un pas de discrétisation égale à 0.0001 ce qui a entraîné un temps de calcul égal à 0.9307 ce qui est supérieur à celui de notre

algorithme. Notre algorithme reste plus performant mais nous remarquons que pour le pas de discrétisation qui est égale à 0.0001 le temps de calcul est très grand.

En fixant $N = 10000$.

| | Prob MC | Prob APP |
|---------------------|-------------------|------------------------|
| $\Delta t = 0.1$ | 0.1139, t=0.0640 | 0.1709, t=3.0587 |
| $\Delta t = 0.01$ | 0.1552, t=0.2134 | 0.1768, t=27.8381 |
| $\Delta t = 0.001$ | 0.1711, t=1.5264 | 0.1771, t=0.2800 |
| $\Delta t = 0.0001$ | 0.1710, t=12.9293 | 0.1726, t=2.7301 e+003 |

Tableau 3.8 Comparaison des algorithmes MC et APP par rapport à plusieurs Δt pour $N = 10000$.

Finalement, la probabilité se stabilise autour de la vraie valeur, le temps de calcul par notre algorithme est donné par 0.2800. Cette valeur n'est pas atteinte par l'algorithme Monte Carlo. La probabilité de Di Nardo est égale 0.1772 avec un temps de calcul égale à 32.008, ce qui est un bon estimateur mais avec un temps de calcul assez grand par rapport au résultat obtenu par notre algorithme.

3.2 Application financière

Nous allons maintenant aborder un exemple sur le problème d'atteinte de richesse optimale. Ce problème est particulièrement utilisé en finance, il repose sur la théorie de portefeuille moyenne-variance qui a été introduite par Harry Markowitz (économiste américain, Prix Nobel d'économie en 1990). Un portefeuille est définie par les parts des titres qui le composent. Ces titre varient par leur nature et leur valeur financière.

Markowitz a eu l'idée de mesurer la rentabilité d'un portefeuille par l'espérance de rendement et le risque par sa variance. Le modèle de Markowitz vise à l'aide d'une méthode mathématique à constituer un portefeuille assurant :

- à risque identique celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée ;
- à espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible.

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficaces que d'autres.

Un portefeuille constitue donc une richesse $x(t)$ qui peut être investie en bourse afin d'optimiser son rendement et minimiser son risque de perte ou dévaluation financière.

Supposons que nous avons un investisseur qui voudrait investir en bourse un certain capital sur une période de temps $[0, T]$ afin de le fructifier jusqu'à l'atteinte d'un certain seuil fixé d'avance z . Notons $x(t)$ sa richesse à l'instant t . Nous allons appliquer notre algorithme afin de déterminer la probabilité du premier temps de passage. Nous supposons que nous sommes dans un cas où il n'existera pas de restriction de faillite. Pour cela nous nous référons aux résultats de l'article de Scott et Watier (10), qui ont réussi à obtenir des bornes inférieure et supérieure à la probabilité d'atteinte d'une richesse désirée z sur un horizon de temps fini T et ceci par la résolution des problèmes de programmation semi-infinies.

Fixons $t \geq 0$, $T > 0$ et $\theta > 0$ Dans ce cas la richesse optimale est donnée par

$$x(t) = \lambda e^{-r(T-t)} f(t, \theta W(t))$$

où

$$f(t, Z) = \Phi(-d_-(y(t, Z))) - \frac{y(t, Z)}{\lambda} e^{r(T-t)} \Phi(-d_+(y(t, Z)))$$

et

$$\begin{aligned}
d_+(t, y(t, Z)) &= \frac{\frac{\ln(y(t, Z))}{\lambda} + (r + \frac{1}{2}\theta^2)(T - t)}{\theta\sqrt{T - t}} \\
d_-(t, y(t, Z)) &= d_+(t, y(t, Z)) - \theta\sqrt{T - t}.
\end{aligned}$$

Nous cherchons à établir la probabilité que

$$x(t) e^{r(T-t)} = z$$

qui est équivalent à trouver la probabilité que

$$\begin{aligned}
\theta W(t) &= Y(t) \\
W(t) &= \frac{1}{\theta} Y(t).
\end{aligned}$$

La barrière $S(t)$ choisi est donc de la forme $S(t) = \frac{1}{\theta} Y(t)$. C'est une barrière que le mouvement brownien standard cherche à franchir.

λ et de μ représentent les multiplicateurs de Lagrange. Ces variables sont obtenues en résolvant le système non-linéaire ci-dessous et où $z > x_0 e^{-\int_0^T r(s) ds}$ les détails sont exposés dans (11).

$$\left\{ \begin{array}{l}
\lambda N \left(\frac{\ln(\frac{\lambda}{\mu}) + \int_0^T [r(s) - \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) - \mu e^{-\int_0^T [r(s) - |\theta(s)|^2] ds} \\
\times N \left(\frac{\ln(\frac{\lambda}{\mu}) + \int_0^T [r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) = x_0 \exp \int_0^T r(s) ds, \\
\lambda N \left(\frac{\ln(\frac{\lambda}{\mu}) + \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) - \mu e^{-\int_0^T r(s) ds} \\
\times N \left(\frac{\ln(\frac{\lambda}{\mu}) + \int_0^T [r(s) - \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) = z.
\end{array} \right.$$

Le tableau ci-dessous compare les résultats de notre algorithme avec les résultats de Scott et Watier (10), LB représente la bande inférieure (Lower bound) et UB la bande supérieure (Upper bound). Nous avons repris les mêmes paramètres de (10), $r(t) = 0.06$, $b(t) = 0.12$, $\sigma(t) = 0.15$, $x_0 = 1$ et $T = 1$. Les différentes valeurs de la richesse z sont données dans le tableau comparatif.

| Richesse | Probabilité APP | Probabilité Scott et Watier |
|----------|-----------------|-----------------------------|
| 1.10 | 0.8264 | LB= 0.83565, UB=0.83566 |
| 1.15 | 0.8260 | LB=0.83534, UB=0.83539 |
| 1.20 | 0.8240 | LB=0.83338, UB=0.83351 |
| 1.25 | 0.8197 | LB=0.82899, UB=0.82928 |
| 1.30 | 0.8131 | LB=0.82183, UB=0.82325 |

Tableau 3.9 Comparaison des probabilité de Scott et Watier avec la probabilité obtenue par APP.

Nous remarquons que bien que nos résultats soient très proche de l'intervalle de (10) cependant ils n'appartiennent pas à cet l'intervalle.

CONCLUSION

Nous avons essayé dans ce mémoire de donner une approche différente de l'approche analytique afin de calculer la probabilité de premier temps de passage d'un processus stochastique à travers une barrière déterministe. En effet, les résultats de l'approche analytique concernent qu'un nombre limité de cas, comme les barrières constantes ou affines. Nous avons présenté dans ce mémoire une nouvelle approche par simulation en proposant un algorithme qui calcul la probabilité de premier temps de passage. Nous avons pu obtenir, dans la plus part des cas, des résultats satisfaisants en appliquant notre algorithme qui se base sur un calcul local de la probabilité de passage à travers une barrière déterministe tout au long de l'intervalle $[0, T]$.

Cependant l'algorithme reste instable pour des pas de discrétisations assez petits et peut ne pas s'améliorer quand on augmente sensiblement le nombre de chemins simulés. Ceci est dû à plusieurs facteurs comme le choix de points pour approximer la courbe déterministe ou l'utilisation d'un seul type de courbe (courbe de Daniels) pour approximer la barrière déterministe.

Il serait intéressant dans le futur d'améliorer la performance et la stabilité de l'algorithme, en utilisant par exemple, une affectation différente des points d'approximation de la barrière dans les différents sous-intervalles. On peut affecter les points selon la courbure de la barrière déterministe afin d'optimiser l'approximation.

ANNEXE

3.3 Modèle de Di Nardo

Nous pouvons résumer le modèle de Di Nardo dans ce qui suit :

- Soit $S(t)$ une barrière continue et différentiable.
- Le temps de premier passage est défini par

$$\begin{aligned} T_{S(\cdot)} &= \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t)\} \\ X_{t_0} &= x_0 < S(t_0) \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

- La probabilité de premier passage est donnée par

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} P(T_{S(\cdot)} \geq t)$$

- Sa formule analytique est donnée par

$$\begin{aligned} g(S(t), t | x_0, t_0) &= -2\Phi(S(t), t | x_0, t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \cdot \Phi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

- Pour évaluer l'intégral, Di Nardo propose une discrétisation de $g(S(t), t | x_0, t_0)$

$$\begin{aligned} t &= t_0 + kp \quad k \in \mathbb{N}^* \\ g(t_0 + kp) &= -2\Phi(t_0 + kp) + 2 \int_{t_0}^{t_0 + kp} g(\tau) \cdot \Phi(t_0 + kp | \tau) d\tau \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

3.4 Codes

```
% Calcul de la probabilité de Monte Carlo d'un mouvement
% brownien à travers la barrière S(t)
```

```
%Fonction temps
```

```
function [t] = temps(m,dt)
```

```
t=zeros(m+1,1);
```

```
for i=1: m
```

```
t(i+1,1)=t(i,1)+dt;
```

```
end
```

```
end
```

```
% Fonction S(t) donnée par S_barriere
```

```
function [ S_barriere] = S1(m)
```

```
S_barriere1= inline('0.001*t+1','t');
```

```
S_barriere= feval(S_barriere1, 10:10:m);
```

```
end
```

```
% Fonction mouvement brownien W(t)
```

```
function [W,position] = brownien_W(dt,n,m)
```

```
norm=normrnd(0,1,m,n);
```

```
W=zeros(m,n);
```

```

position= 10:10:m;

for i=1 : m
    W(i+1,:)=W(i,:)+sqrt(dt)*norm(i,:);
end
end

% Fonction qui calcul la probabilité de Monte Carlo
function [prob_montecarlo,position,S_barriere,W,t,W2,W2_valmax]
    = simul_montecarlo(dt,n,m,decoupe)

tic;

[S_barriere] = S1(m);
[W,position] = brownien_W(dt,n,m);

l = (10:decoupe:m);
W2= W(l,:);

W2=W2-repmat(S_barriere',1,size(W2,2));

W2_valmax=max(W2);

compteur=0;
for i=1 :n
    if (W2_valmax(1,i) >= 0)
        compteur=compteur+1;
    end
end
end

```

```
prob_montecarlo=compteur/n;
```

```
t=toc;
```

```
end
```

```
% Calcul de la probabilité de Monte Carlo d'un processus
```

```
% d'Ornstein-Uhlenbeck à travers la barrière y(t)
```

```
clear all
```

```
tic;
```

```
lambda = 1;
```

```
mu = 1.2;
```

```
sigma = 1.2;
```

```
dt = 1e-3;
```

```
t = 0:dt:2;
```

```
N=1000;
```

```
S = zeros(length(t),N);
```

```
rng(1);
```

```
for j=1:N
```

```
for i = 1:length(t)-1
```

```
    S(i+1,j) = S(i,j)+lambda*(mu-S(i,j))*dt+sigma*sqrt(dt)*randn;
```

```
end
```

```
end
```



```
S=S';  
y=1+0.5*t;  
  
compteur=0;  
yplus= repmat(y,N,1);  
diff=S-yplus;  
diff=diff';  
diffM=max(diff);  
  
for i=1 :N  
    if (diffM(1,i) >= 0)  
        compteur=compteur+1;  
    end  
end  
  
prob_montecarlo=compteur/N;  
  
timy=toc;  
  
figure;  
plot(t,S,t,y);
```

```

clear all
randn('seed',0);
rand('seed',0);

r=0.06;
b=0.12;
T=1;
sigma=0.15;
theta=(b-r)./sigma;
z=1.30;
n_prim=1000*2;
n=1000;
x0=1;
N=100000;
delta=T/n;
dt=delta/2;
S=zeros(1,n);

path1=cumsum([zeros(N/2,1) sqrt(delta).*randn(N/2,n)],2);

path=[path1;-path1];

F1=@(x) x(1).*normcdf((log(x(1)./x(2))+(r-0.5.*theta.^2).*T)./(theta.*sqrt(T)))-
x(2).*exp((theta.^2-r).*T).*normcdf((log(x(1)./x(2))+(r-1.5.*theta.^2).*T).

```

```

/(theta.*sqrt(T))-x0.*exp(r.*T);
F2=@(x) x(1).*normcdf((log(x(1)./x(2))+(r+0.5.*theta.^2).*T)./(theta.*sqrt(T)))- x(2).
*exp(-r.*T).*normcdf((log(x(1)./x(2))+(r-0.5.*theta.^2).*T)./(theta.*sqrt(T)))-z;
F=@(x) [F1(x) F2(x)];

Lagr=fsolve(F,[1,1]);
lambda=Lagr(1);
mu=Lagr(2);

S=zeros(1,n);
init=theta;
i=1;
t=0;

for i=1:n+1
    t=(i-1)*delta;
    y=@(x) mu.*exp((theta.^2-2.*r).*T+(r-1.5.*theta.^2).*t-theta.*x);
    dplus=@(x) (log(y(x)./lambda)+(r+0.5.*theta.^2).*(T-t))./(theta.*sqrt(T-t));
    dminus=@(x) dplus(x)-theta.*sqrt(T-t);
    G2=@(x) lambda.*normcdf(-dminus(x))-y(x).*normcdf(-dplus(x)).*exp(r.*(T-t))-z;
    S(i)=fsolve(G2,init);
    init=S(i);
end

S_dt=zeros(1,n/2);
S_delta=zeros(1,n/2);
path_dt=zeros(N,n/2);

```

```
path_delta=zeros(N,n/2);
```

```
i=1;
```

```
for k=1:n/2
```

```
    S_dt(1,k)=S(1,i);
```

```
    S_delta(1,k)=S(1,i+1);
```

```
    i=i+2;
```

```
end
```

```
for j=1:N
```

```
    i=1;
```

```
    for k=1:n/2
```

```
        path_dt(j,k)=path(j,i);
```

```
        path_delta(j,k)=path(j,i+1);
```

```
        i=i+2;
```

```
    end
```

```
end
```

```
Spass=repmat(S_delta,N,1);
```

```
Pass=path_delta-Spass;
```

```
ProbMC=mean(max(path_delta-repmat(S_delta,N,1),[],2)>=0);
```

```
probnw=mean(max(path>=repmat(S,N,1),[],2));
```



```

Inot=find((max(Pass)<=0));
Nnot=size(Inot,2);
Nplus=0;
SimU=rand(Nnot,n/2);

l= repmat(S_delta,Nnot,1);
ll=[zeros(Nnot,1) path_delta(Inot,:)];
Y_c=repmat(S_delta,Nnot,1) - path_delta(Inot,:);
Y_c=[zeros(Nnot,1) Y_c];

Y_M=repmat(S_dt,Nnot,1)-0.5*(path_dt(Inot,:)+path_dt(Inot,:));

for k=1:Nnot

for j=1:(n/2)

alpha=2*Y_c(k,j);
A=exp(alpha^2/(2*delta));
Y3=exp(-2*alpha*Y_M(k,j)/delta);
Y2=exp(-alpha*Y_c(k,j+1)/delta);

if Y3/Y2 >= 1/A^2
    c(1)=A*(A^4*Y3^2-Y2^2)/(A^3*Y3-Y2);
else
    c(1)=0;

```

```

end;

if A^2*Y3/Y2-A > sqrt(A^2-1)
    c(1)=2*Y2*A;
end;

c(2)=A^4*Y2^2-c(1)*A^3*Y2;

U(k,j)=c(1)*exp(-0.5*(alpha^2/delta))+c(2)*exp(-2*(alpha^2/delta));
end;
Nplus=Nplus+any(SimU(k,:)<=U(k,:));
end

ProbMCplus=probnw+Nplus/N

```

RÉFÉRENCES

- (1) Lefebvre, Mario. *Processus stochastique appliqués*. Deuxième édition, Presses Internationales Polytechnique, 2014.
- (2) Di Nardo, E. *et al.*, A Computational Approach to First Passage Time Problems for Gauss-Markov Processes, *Advances in Applied Probability*, Vol. 33, p. 453-482, 2001.
- (3) Downes, A.N. and Borovkov K., First Passage Densities and Boundary Crossing Probabilities for Diffusion Processes, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 10, p. 621-644, 2008.
- (4) Beskos, A. and Roberts, G. O., Exact simulation of diffusions, *Annals of Applied Probability*, Vol. 15, No. 4, p. 2422-2444, 2005.
- (5) Giraudo, M.T., Sacerdote, L. and Zucca, C., A Monte Carlo Method for the Simulation of First Passage Time of Diffusion Processes, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 3, p. 215-231, 2001
- (6) Lin, M., Chen, R. and Mykland, P., On Generating Monte Carlo Samples of Continuous Diffusion Bridges, *Journal of the American Statistical Association* Vol. 105, No.490, p. 820-838, 2010.
- (7) Sørensen, M. and Bladt, M., Simple simulation of diffusion bridges with application to likelihood inference for diffusions, To appear in *Bernoulli*.
- (8) Daniels, H.E. The minimum of the stationary Markov process superimposed on a U-shaped. trend. *J. Appl. prob.* 6. 399-408 ,1969
- (9) Iacus, S.M., *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*, Springer, New York, 2008
- (10) Scott, A., Watier, F., Bounds for Goal Achieving Probabilities of Mean-Variance Strategies with a No Bankruptcy Constraint, *Applied Mathematics*, 2012, 3, 2022-2025
- (11) T. R. Bielecki, H. Jin, S. R. Pliska and X. Y. Zhou., Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection with Bankruptcy Prohibition, *Mathematical Finance*, Vol. 15, No. 2, 2005, pp. 213-244